Random Boolean Networks (RBNs)

Seminar AG Bornholdt: Komplexe Dynamische Systeme

Alexander Erlich

alexander.erlich@gmail.com

http://www.airlich.de

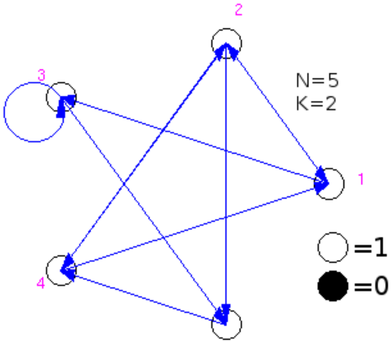
Universität Bremen

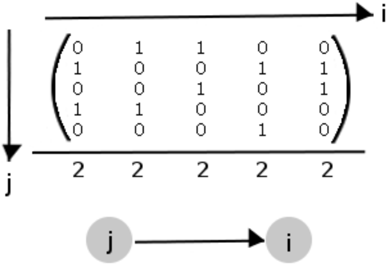
12. Januar 2011

Random Boolean Networks (RBN): Regeln

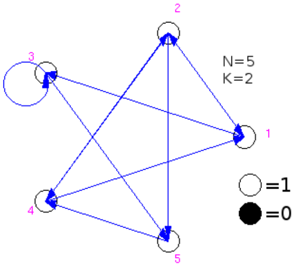
Teil 1: Knoten, Input, Output

- Auch *NK*-Netzwerke oder Kauffman-Netzwerke. Dieser entwickelte 1969 ein Modell für die Dynamik von Genregulation – Gen aktiv (1) oder nicht (0).
- N Knoten, die die binären Zustände 0 oder 1 annehmen können
- jeder Knoten **muss** K inputs haben
- ein Knoten kann beliebig viele outputs haben (zwischen 0 und N)





- Jeder Knoten hat seine **eigene Boolean** function. Sie beschreibt den Übergang des Knotens zum nächsten Zeitschritt.
- Es gibt immer 2^K mögliche Eingabemuster. Die Boolean function ordnet jedem Muster einen zufälligen output zu.
- Alle Knoten werden gleichzeitig synchronisiert.



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2^K (rows), K (input columns)

I_1	I_2	O
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Zeitentwicklung

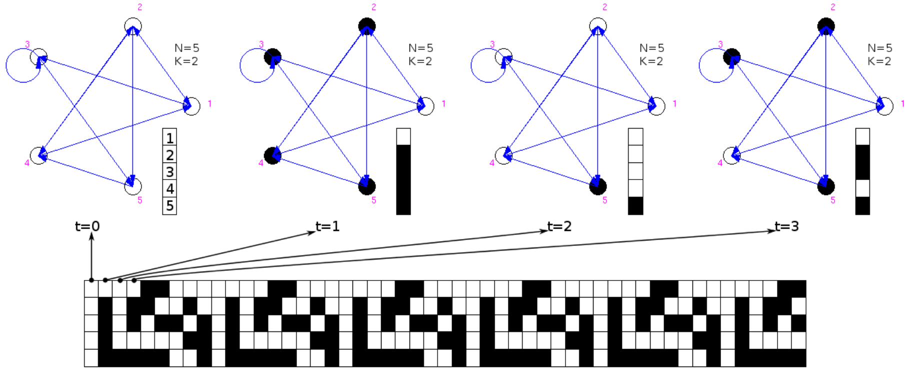
zum Schritt-für-Schritt-Durchgehen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2^K

I_1	I_2	O
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

K

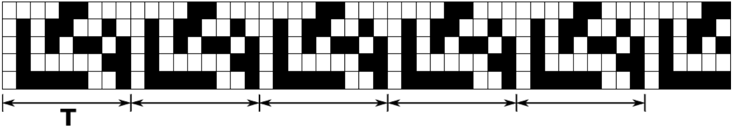


Zustandsraum

- Bei einem Netzwerk mit N Knoten ist der Zustandsraum 2^N.
- Die Dynamik des Systems (also der Übergang von Zuständen) ist stets deterministisch.
- Wenn sich ein Zustand wiederholt, wird immer dieselbe Sequenz an Zuständen „abgespielt“.
- Das ist periodisches Verhalten: Die Dynamik des Systems hat dann einen Attraktor erreicht.

periodische Attraktoren

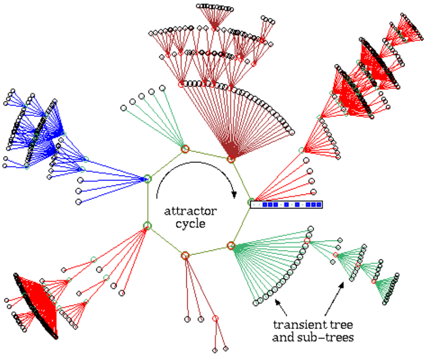
- Da der Zustandsraum immer endlich ist (2^N Zustände), führt die Dynamik immer auf einen periodischen Attraktor.
- Die Periodendauer T (d.h. Anzahl der Zustände im Attraktor) ist $T \in [1, 2N]$
- Nicht jeder Zustand ist Teil eines periodischen Attraktors, es gibt auch Attraktor-Basins (Übergangszustände des Netzwerks, die zu einem Attraktor führen)
- Die Basins können nicht überlappen, weil die Dynamik deterministisch ist.

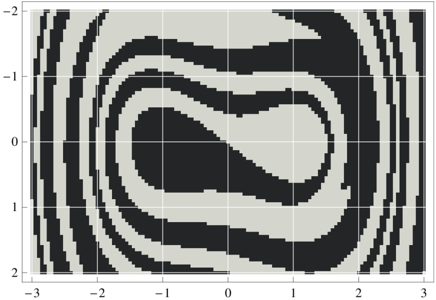


Attraktor-Basins[1]

Duffing-Oszillator

$$\ddot{x} - \beta x + \alpha x^3 = \varepsilon (\gamma \cos(\omega_E t) - c \dot{x})$$

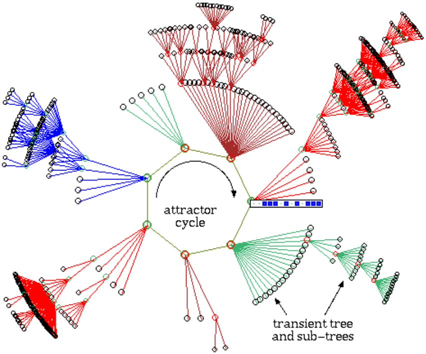


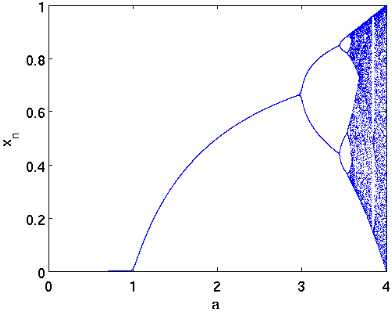


[1] linkes Bild: `http://www.metafysica.nl/rbn_attractor.gif`

logistische Abbildung

$$x_{n+1} = a\,x_n\,(1 - x_n)$$





[2] linkes Bild: http://www.metafysica.nl/rbn_attractor.gif

Periodenverdopplung (source code)

```
function Feigenbaum_orig(y0, ndark, nsave)
%Feigenbaum Draws a Feigenbaum bifurcation diagram for the logistic
%equation.
%   y0:     initial value of the logistic equation iteration
%   ndark:  darkroom iterations. These iterations are not plotted. They are
%           required to get the current iterated value close to the current
%           attractor.
%   nsave:  Once ndark calculations have been computed, an additional
%           number (nsave) of calculations is performed. These ones are
%           actually plotted. Thus, with a given a value, ndark+nsave
%           calculations are performed.
%
%   Author: Alexander Erlich

h=plot(0,0); hold on;

axis([0 4 -0.1 1.1]);

a=[0:0.001:4]';
yn=ones(length(a),1).*y0;

for i=1:(ndark+nsave)
    if ishandle(h)==1
        yn=a.*yn.*(1-yn);
        if i>ndark
            plot(a,yn,'.','MarkerSize',1)
            drawnow;
        end
    end
end

hold off;
```

Weiterführende Literatur I

M. Aldana, S. Coppersmith, and L.P. Kadanoff.
Boolean dynamics with random couplings.
preprint: `http://de.arxiv.org/abs/nlin/0204062`.
Perspectives and Problems in Nonlinear Science, pages 23–89, 2003.

B. Drossel.
Random boolean networks.
preprint: `http://arxiv.org/pdf/0706.3351`.
Reviews of nonlinear dynamics and complexity, 1, 2008.

S. Kauffman.
Homeostasis and differentiation in random genetic control networks.
Nature, 224:177–178, 1969.

Weiterführende Literatur II

S. Kauffman.
Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets.
Journal of theoretical biology, 22(3):437–467, 1969.

S. Kauffman.
At Home in the Universe: The Search for the Laws of Self-Organization and Complexity.
Oxford University Press, USA, November 1996.