

Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Festkörpern

Alexander Erlich

Universität Bremen, Fachbereich 1, Otto-Hahn-Allee 1

28359 Bremen, Deutschland

alexander.erlich@gmail.com

Abstract

Im Praktikumsversuch *M15* wird der Elastizitätsmodul für Stäbe verschiedener Materialien anhand von zwei unterschiedlichen Messungsarten ermittelt. Ziel ist es, einen Einblick in die Physik der verformbaren Körper zu gewinnen und eine Auseinandersetzung mit Fehlerrechnung sowie einen Vergleich der verschiedenen Messmethoden zu erreichen. Für die dynamische Messung wird über einen Versuchsaufbau mit Piezoelement und CASSY-Interface die Schallgeschwindigkeit in den Stäben ermittelt, während bei der statischen Variante die Durchbiegung der fixierten Stäbe anhand von Gewichten und einer Lichtpunktprojektion gemessen wird.

1 Einleitung

In der Dynamik und der Kinetik ist es für die meisten Prozesse ausreichend, einen Körper als starr aufzufassen, oder ihn sogar auf einen Massenpunkt zu reduzieren. Dies ist eine Vereinfachung, denn jeder Körper verändert seine Form unter Anwendung äußerer Kräfte. Diese Formveränderung zu berechnen ist Aufgabe der Mechanik der deformierbaren Medien.

Die Elastizität eines Materials spielt etwa in den Ingenieurwissenschaften und der Technik eine sehr wichtige Rolle (z.B. Baustatik, Biegefähigkeit von Maschinenteilen). Im Versuch *M15* sollen die Elastizitätsmodule von vier verschiedenen Materialien mit einem dynamischen und einem statischen Verfahren experimentell ermittelt werden. Bei der dynamischen Messung, welche hier im Vordergrund stehen soll, wird über ein CASSY-Interface die Schallgeschwindigkeit im Medium (*Körperschall*) ermittelt, um den Elastizitätsmodul zu berechnen. Bei der statischen Messung wird dies über das Biegen von Stäben erreicht. Anschließend sollen die Verfahren anhand der Messergebnisse miteinander verglichen werden.

2 Theoretischer Hintergrund

Man stelle sich einen Metallstab der Länge l vor, der an einem Ende von einer Halterung fixiert wird. An seinem anderen Ende werde die Zugkraft \vec{F} auf die Querschnittsfläche A des Stabes ausgeübt. Dabei soll sich die Kraft gleichmäßig über die Querschnittsfläche des Stabes verteilen. Das Verhältnis der Kraft \vec{F} zur Querschnittsfläche A heißt Zugspannung oder kurz Spannung (engl. *strain*) $\sigma = F/A$. Dadurch, dass die Zugkraft wirkt, wird der Stab gedehnt. Der Bruchteil $\Delta l/l$, um den sich die Länge des Stabes ändert, heißt relative Längenänderung oder Dehnung (engl. *stress*) $\varepsilon = \Delta l/l$.

Der Elastizitätsmodul E (engl. *Young's modulus of elasticity*) wird definiert über das HOOKE'sche Gesetz $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Es ist $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta l/l}$ mit der Einheit $[E] = 1\text{N/m}^2$.

Bei der dynamischen Messung kann der Elastizitätsmodul aus dem Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit v , Elastizitätsmodul E und Dichte ρ des Stoffes ermittelt wer-

den:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow E = \rho \cdot v^2 \quad (1)$$

Diese und die folgende Formel sollen nicht hergeleitet werden. Hält man ein Ende eines Stabes der Länge L waagrecht fest (im Versuch durch eine Wandhalterung) und beschwert das andere Ende mit einer Kraft F , so ergibt sich der folgende Zusammenhang, der für die statische Messung des Elastizitätsmoduls wichtig ist:

$$s = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}, \text{ wobei } I = \frac{\pi}{4} R^4 \text{ das Flächenträgheitsmoment ist.} \quad (2)$$

3 Experimentelles

Bei der dynamischen Messung wird der Elastizitätsmodul E von Eisen, Aluminium, Messing und PVC dynamisch bestimmt, indem die Schallgeschwindigkeit im jeweiligen Material gemessen wird. Dabei werden von jedem Material $1m$ lange, zylinderförmige Stäbe mit der Dichte ρ und dem Radius R verwendet. Es wird der jeweilige Stab auf ein Piezo-element gestellt, welches mit dem CASSY-Interface¹ verbunden ist. Gibt man mit einem Holzklötzchen einen Schlag in Längsrichtung des Stabes, übertragen sich Impulse auf den Piezokristall, welcher bei Deformation Spannung erzeugt, die vom Interface eingelesen und am Computer als Spannungskurve ausgegeben wird (*Speicheroszilloskop*). Über den zeitlichen Abstand mehrerer Peaks kann die Geschwindigkeit des Schalls im jeweiligen Material ermittelt werden, um mit Gleichung (1) den Elastizitätsmodul zu bestimmen.

Bei der statischen Messung werden dieselben Stäbe in eine Wandhalterung eingespannt und am freien Ende mit Gewichten beschwert. Dabei wird bei Eisen und PVC die Kraft F , die durch die Gewichte am Stab angreift, bei konstanter Stablänge variiert. Bei Messing und Aluminium hingegen wird bei konstanter Kraft die Länge L des Stabes variiert, indem der Stab in der Fixierung der Halterung verschoben wird. Indem ein auf dem sich durchbiegenden Stab befestigter Laserpointer einen Lichtpunkt auf einen einige Meter entfernten Schirm projiziert, kann durch Entfernungsmessung auf dem Schirm mit Strahlensätzen auf die Durchbiegung s geschlossen werden, so dass nach Gleichung (2) der Elastizitätsmodul bestimmt werden kann.

4 Ergebnisse und Diskussion

In Abbildung 4 auf der nächsten Seite ist der zeitliche Verlauf der Impulse aufs Piezo-Element dargestellt. Die Kurve vollführt in etwa eine schwach gedämpfte, harmonische Schwingung. Sie lässt sich so interpretieren, dass der Druckimpuls sich im Stab mit der dem Material eigenen Schallgeschwindigkeit ausbreitet, bis er an den jeweiligen freien Ende ohne Phasensprung reflektiert wird. Das Piezo-Element registriert Druckänderungen und gibt entsprechend Spannungssignale mit unterschiedlichen Vorzeichen für eine Druckzunahme (wenn der Schallimpuls am unteren Ende des Stabes ankommt und aufs Piezo-Element einen Druck ausübt) bzw. Druckabnahme (wenn Schallimpuls sich wieder entfernt). So ist der Schallimpuls zwischen zwei Peaks zweimal durch den $1m$ -langen Stab gewandert, hat also $2m$ zurückgelegt. Somit ist die Strecke bekannt, die der Schallimpuls im jeweiligen Material in einer gemessenen Zeit durchquert hat. Mit diesen Informationen lässt sich die Schallgeschwindigkeit im Medium bestimmen und nach der erfolgten

¹Computer Assisted Science SYstem, mehr Informationen auf <http://www.leybold-didactic.com/software/?cassy-s.html>

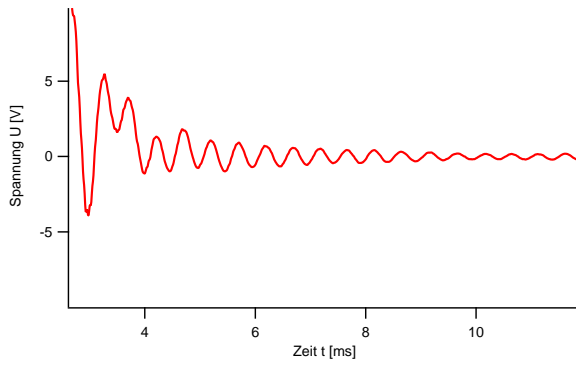


Abbildung 1: Spannungs-Zeit-Graph (PVC)

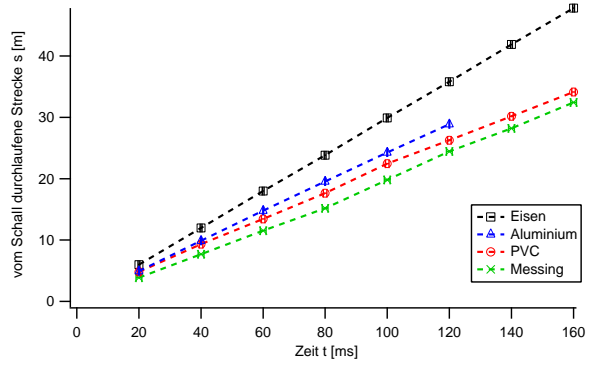


Abbildung 2: s - t -Graph aller Materialien

Material	E [N/m^2] gemessen	Abw. von Lit.
Eisen	$(1,9577 \pm 0,0739) \cdot 10^{11}$	3,04%
Messing	$(9,4355 \pm 0,2469) \cdot 10^{10}$	20,97 – 30,36%
Aluminium	$(1,8606 \pm 0,0670) \cdot 10^{10}$	276,22%
PVC	$(2,4659 \pm 0,0617) \cdot 10^{10}$	584,97 – 848,42%

E [N/m^2] gemessen	Abw. von Lit.
$(5,1412 \pm 0,2324) \cdot 10^{10}$	269,56%
$(1,2809 \pm 0,1658) \cdot 10^{10}$	508,95 – 80,26%
$(1,7236 \pm 0,2338) \cdot 10^{10}$	306,13%
$(7,1004 \pm 0,3285) \cdot 10^9$	97,23 – 173,09%

Tabelle 1: Ergebnisse der dynamischen (linke Tabelle) und statischen Messung

Dichtemessung des Stabes anhand von Gleichung (1) der Elastizitätsmodul bestimmen. Die entsprechenden Streckenmesswerte für alle 10 Peaks sind für die vier Medien sind in Abbildung 4 dargestellt. Mit Hilfe von der Steigung einer angelegten Regressionsgeraden (hier wegen der Übersicht nicht eingezeichnet) wurden die Schallgeschwindigkeiten und ihre Fehler ermittelt.

Die gemessenen Elastizitätsmodule für die dynamische und die statische Messung sind in den Tabellen 1 und 2 dargestellt und anhand der prozentualen Abweichungen mit Literaturwerten verglichen worden.

Ein Grund für die Ungenauigkeit der Messungen des dynamischen Verfahrens liegt in der kaum vermeidbaren Ausbildung von Transversalwellen, die sich mit den (ausschließlich für das Versuchsergebnis relevanten) Longitudinalwellen überlagern. Des Weiteren ist das dynamische Verfahren weniger geeignet, wenn die Kopplung zwischen den Atomen und Molekülen relativ schwach ist. Dies erklärt, warum die Messergebnisse fürs PVC bei der dynamischen Messung vergleichsweise ungenau waren.

Bei der statischen Messung war problematisch, dass die Stäbe für eine genaue Messung mit den vorhandenen Gewichten teilweise nicht weit genug durchgebogen werden konnten, so dass der Fehler auf der Aufzeichnung des Schirms entsprechend groß wurde. Da sich PVC allerdings recht leicht durchbiegen ließ, konnte der Elastizitätsmodul hier verglichen mit den anderen statischen Messungen relativ genau bestimmt werden.

5 Zusammenfassung

Es ist gezeigt worden, dass das dynamische Messverfahren des Elastizitätsmoduls genauer ist als das statische. Darüber hinaus bietet es den Vorteil, dass ein Probestück bei der Messung der Schallgeschwindigkeit - anders als beim statischen Messverfahren - nicht beschädigt wird. Aus diesen Gründen findet das dynamische Verfahren in Industrie und Technik den Vorzug. Ein Beispiel dafür für eine solche technische Anwendung sowie weitere Informationen stehen auf <http://airlich.de.tt> im Bereich "Anderes" zur Verfügung.

Literatur

- [1] Giancoli, Douglas C.: Physik (3. Aufl.). Pearson Studium, 2006
- [2] Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik 1 (4. Aufl.). Springer, 2006
- [3] Meschede, Dieter: Gerthsen Physik (21. Aufl.). Springer, 2002
- [4] Halliday, Resnick, Walker: Physik. Wiley-VCH, 2003
- [5] Formeln und Tabellen für Techniker und Ingenieure. Fikentscher, 1963
- [6] Aufgabenstellung der Physika-Website zu M15, Download am 13. November 2007